19/10/2016

Ερώτημα : Πως ορίζεται το a^x , $x \in \mathbb{R}$ $(a>0)$

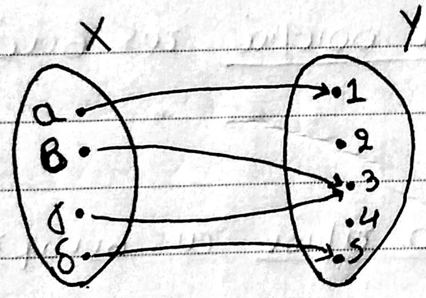
$(a^{x+y} = a^x \cdot a^y)$
$((a^x)^y = a^{x \cdot y})$

→ Για $a=1$ $1^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

→ Για $a>1$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίσουμε
$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q} \; q<x\}$ $[= \inf\{a^p \; p \in \mathbb{Q} \; p>x]$

→ Για $0<a<1$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίσουμε
$a^x = \inf\{a^q \; q \in \mathbb{Q} \; q<x\}$ $[= \sup\{a^p \; p \in \mathbb{Q} \; p>x\}]$

Συναρτήσεις



Εστω X,Y δυο σύνολα

Συνάρτηση απο το X στο Y είναι μια <u>διαδικασία</u> που σε κάθε στοιχείο του συνόλου X αντιστοιχίζει ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Y

Για να περάσουμε στον αυστηρό ορισμό χρειαζόμαστε την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους

Διατεταγμένο ζεύγος (x,y) $= \{\{x\}, \{x,y\}\}$

Σημαντική ιδιότητα $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=\delta \end{cases}$

Αν X,Y δυο σύνολα το καρτεσιανό γινόμενο $X\times Y$ των X,Y ειναι το σύνολο $X\times Y=\{(x,y)\ x\in X\ y\in Y\}$

Συνάρτηση απο ένα συνολο X σε ένα σύνολο Y ονομάζεται κάθε υποσύνολο f του $X\times Y$ ώστε:

(i) $\forall x\in X\ \ \exists y\in Y\ \ (x,y)\in f$

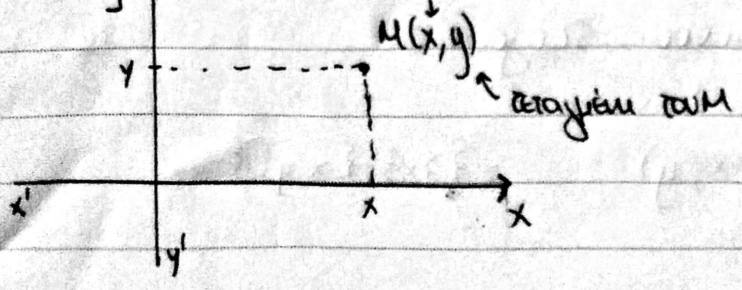
(ii) Αν $x\in X$ και $y_1,y_2\in Y$ ώστε $(x,y_1)\in f$ και $(x,y_2)\in f$ τότε $y_1=y_2$

Για κάθε $x\in X$ το μοναδικό $y\in Y$ για το οποίο $(x,y)\in f$ θα το συμβολίζουμε με $f(x)$

- Το σύνολο X ονομάζεται <u>πεδίο ορισμού</u> της συνάρτησης f
- Το σύνολο Y ονομάζεται <u>πεδίο τιμών</u> της συνάρτησης f

Αν $f: X\to Y$ μια συνάρτηση ονομάζουμε σύνολο τιμών της f και συμβολίζουμε με $R(f)$ ή $f(X)$

$f(X)=\{y\in Y : \exists x\in X\ \ y=f(x)\}=\{f(x)\ x\in X\}$



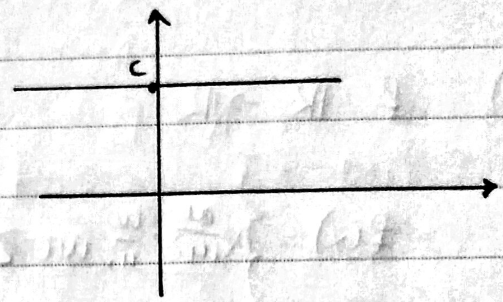
Στο εξής τα X,Y θα ειναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Αν $f: A \to B$ με $A, B \subseteq \mathbb{R}$ το σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, f(x))$ με $x \in A$ λέγεται γραφική παράσταση της f

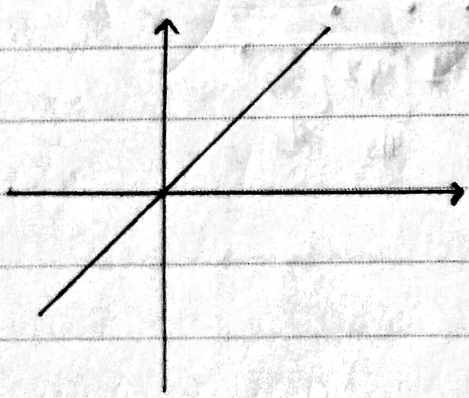
Παραδείγματα

(i) Αν $c \in \mathbb{R}$ ορίσουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$
Σταθερή συνάρτηση με τιμή c

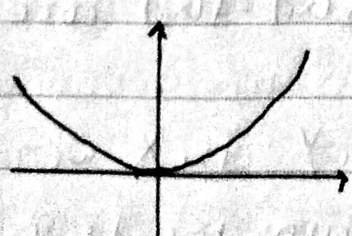


Σύνολο τιμών της f είναι το
$f(\mathbb{R}) = \{c\}$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ταυτοτική συνάρτηση
Σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



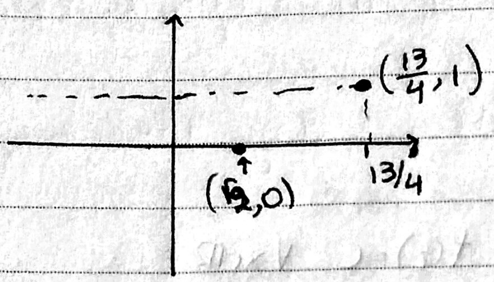
(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ Σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$



(iv) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in \mathbb{R}-Q\end{cases}$$ Συνάρτηση Dirichlet

Σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\{0,1\}$



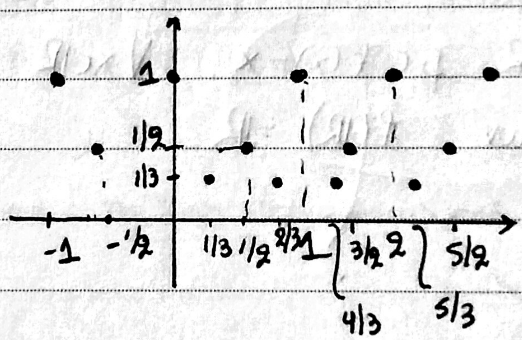
(v) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\nu} & x=\frac{\mu}{\nu},\ \mu\in \mathbb{Z},\ \nu\in \mathbb{N} \quad \text{Μ.Κ.Δ}(\mu,\nu)=1\\ 0 & ,\ x\in\mathbb{R}-Q\end{cases}$$

Ενδεικτικά:

$f(\sqrt{2})=0$, $f(5)=1$

$f\left(\frac{8}{6}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$



Ορισμός

Έστω $f: X\to Y$ μια συνάρτηση

α) Η f καλείται αμφιμονοσήμαντη ή 1-1 αν $\forall x_1,x_2\in X$ αν $x_1\neq x_2$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$

(ή ισοδύναμα $\forall x_1,x_2\in X$ αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$)

β) Η f λέγεται επί (του Y) $\forall y\in Y\ \exists x\in X$ ώστε $f(x)=y$

(δηλ. το σύνολο τιμών $f(X)$ της f είναι ίσο με το Y $f(X)=Y$)

Παραδείγματα

α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$

Η f δεν είναι 1-1 (αφού π.χ. $f(-3) = f(3)$)

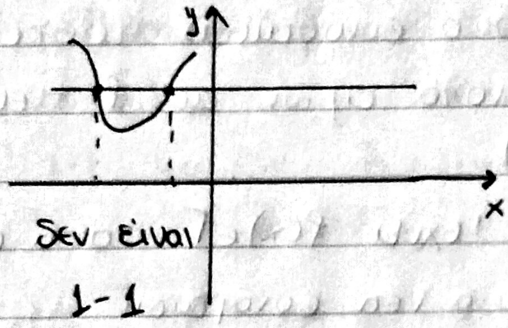
Η f δεν είναι επί, π.χ. δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -1$

β) $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $\quad g(x) = x^2$

Η g δεν είναι 1-1 (π.χ. $g(-4) = g(4)$)

Η g είναι επί αφού $\forall y \in [0, +\infty)$ $\exists x \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = y$

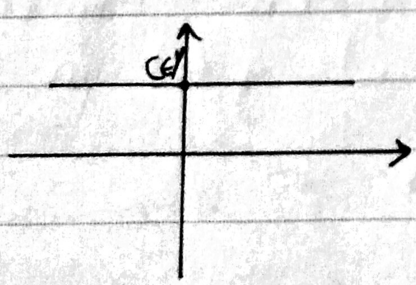
για $x = \sqrt{y}$ ή $x = -\sqrt{y}$



δεν είναι 1-1

• Στο σχήμα η f είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο

• Η $f: X \to Y$ είναι επί $\iff$ $\forall c \in Y$ η οριζόντια ευθεία $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f



Παρατήρηση

Αν $f: X \to Y$ τυχούσα συνάρτηση (ενδεχομένως όχι επί) αντικαθιστώντας το πεδίο τιμών Y με το σύνολο τιμών $f(X)$

$f: X \to f(X)$ έχουμε μια συνάρτηση επί

Ορισμός Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση 1-1 και επί
(Τότε για κάθε $y \in B$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ ώστε $f(x) = y$)
f επί f 1-1

Έτσι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$
με $f^{-1}(y) =$ "το μοναδικό $x \in A$ ώστε $f(x) = y$"

για $x \in A$, $y \in B$ $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω $f: A \to B$ $g: \Gamma \to \Delta$ δύο συναρτήσεις ώστε
$f(A) \subseteq \Gamma$ (δηλ. το σύνολο τιμών της f περιέχεται
στο πεδίο ορισμού της g)
Τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \in \Gamma$ άρα ορίζεται
$g(f(x))$. Έτσι ορίζεται μια νέα συνάρτηση
$g \circ f : A \to \Delta$ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$
$\forall x \in \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = (x+3)^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$

Εν γένει ο $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι διαφορετικές συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω $f: A \to B$ 1-1 και επί (οπότε ορίζεται η $f^{-1}: B \to A$)

Τότε $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A \quad \leftarrow$ δηλ. η $f^{-1} \circ f = Id_A$ (ή I_A)

Είναι η ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου A

$(f \circ f^{-1})(y) = y \quad \forall y \in B \quad \leftarrow$ δηλ η $f \circ f^{-1} = Id_B$ (ή I_B)

είναι η ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου B.

Αποδ.

Άμεσα από τον ορισμό της f^{-1}

Παράδειγμα

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = 6x + 15$. Να εξεταστεί αν η f είναι 1-1 και επί. Αν είναι να βρεθεί η f^{-1}

Απόδειξη

f 1-1

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 6x_1 + 15 = 6x_2 + 15$

$\Rightarrow 6x_1 = 6x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

f επί

Έστω $y \in \mathbb{R}$

Αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = y$

$\Leftrightarrow 6x + 15 = y$

$\Leftrightarrow 6x = y - 15$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6}y - \frac{15}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}$

Άρα f επί

Συνέπεια Ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}$ ή $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x - \frac{5}{2}$

Παρατήρηση

Αν $f: A \to B$ είναι 1-1 τότε (αντικαθιστώντας στην περίπτωση που η f δεν είναι επί το B με το $f(A)$) η $f: A \to f(A)$ θα είναι 1-1 και επί

Ορίζεται συνεπώς

$f^{-1}: f(A) \to A$

Παράδειγμα

Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1 ούτε επί αντικαθιστώντα το $\mathbb{R}$ με το $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$ είναι επί αλλά όχι 1-1

Για τη συνάρτηση

$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $g(x) = x^2$ είναι 1-1 και επί

Άρα ορίζεται η $g^{-1}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $g^{-1}(a) = \sqrt{a}$

Η $h: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$

με $h(x) = x^2$ είναι (όπως εύκολα ελέγχεται 1-1 και επί)

η επί

Έστω $y \in [0, +\infty)$

Αναζητούμε $x \in (-\infty, 0]$ ώστε $h(x) = y \iff$

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \text{ ή } x = -\sqrt{y} \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$$

Ορίζεται

$h^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$ με $h^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Πράξεις συναρτήσεων

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις

α) ορίζεται η $(f+g) : A \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (άθροισμα των f, g)

β) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (γινόμενο των f, g)

γ) $-f : A \to \mathbb{R}$ $(-f)(x) = -f(x)$

δ) Θέτοντας $\Gamma = \{x \in A \; g(x) \neq 0\}$ ορίζεται $\frac{f}{g} : \Gamma \to \mathbb{R}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Ορισμός Αν $f : X \to Y$ συνάρτηση και $A \subsetneq X$ ο περιορισμός της f στο A είναι η συνάρτηση $g : A \to Y$ με τύπο $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A$

Συμβολ. $g = f|_A$ ή $g = f/A$

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$ Η f λέγεται :

α) Αύξουσα $\quad \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

β) Γνησίως αύξουσα $\quad \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

γ) Φθίνουσα $\quad \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

δ) Γνησίως φθίνουσα $\quad \forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ε) Μονότονη $\quad$ αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα

στ) Γνησίως μονότονη αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

Αν $I \subseteq A$ (συνήθως I διάστημα)

λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο I

αν $\forall x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

[Η $f|_I$ είναι γν. αύξουσα]

Ομοίως f αύξουσα στο I

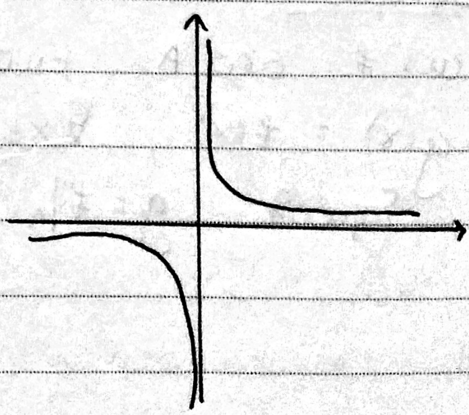
φθίνουσα στο I

γνησίως φθίνουσα στο I

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ (αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$)

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ $\quad x_1 < x_2 < 0$

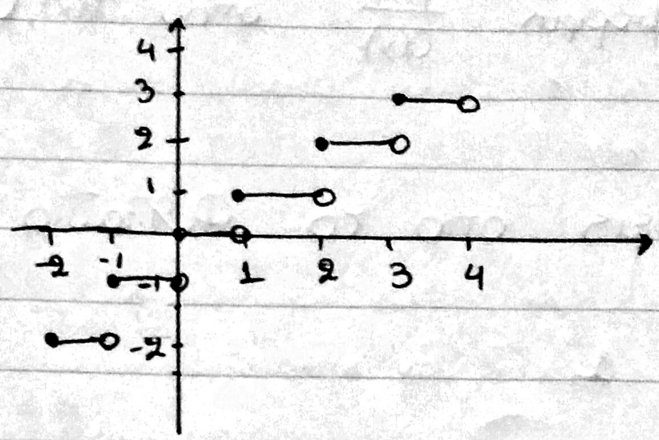
$\Rightarrow 0 < -x_2 < -x_1$

$\overset{x_1 x_2 > 0}{\Longrightarrow} (-x_2)\frac{1}{x_1 \cdot x_2} < (-x_1)\frac{1}{x_1 \cdot x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Όμως η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
(εφόσον π.χ $-1<1$ αλλά $f(-1) < f(1)$)

Παράδειγμα
$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x) = [x]$



Η f είναι αύξουσα αλλά όχι γνησίως αύξουσα

Ορισμός
Έστω $f: A\to\mathbb{R}$
Η f λέγεται
α) Άνω φραγμένη αν $\exists M\in\mathbb{R}$ $f(x) \leq M$ $\forall x\in A$

β) Κάτω φραγμένη αν $\exists m\in\mathbb{R}$ $m \leq f(x)$ $\forall x\in A$

γ) Φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη
$\Leftrightarrow$ $\exists M>0$ $|f(x)| \leq M$ $\forall x\in A$

Ορισμός

Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Συνήθως αντί για $\alpha(\nu)$ συμβολίζουμε α_ν για $\nu\in\mathbb{N}$
$(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

Ορισμός Πολυωνυμική συνάρτηση ονομάζεται κάθε $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της μορφής $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Ορισμός Ρητή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα.

Ασκήσεις απο το Φυλλάδιο 1

Ασκηση 1

$A = \{ -\frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \}$
$(= \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots\})$

$-1 = \frac{-1}{1} \in A$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \geq -1$

Αρα $\min A = -1$ συνεπως $\inf A = -1$

Θα δ.ο $\sup A = 0$
α) $-\frac{1}{n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ δηλ. το 0 είναι άνω φράγμα του A
β) Εστω $\varepsilon > 0$
Θα δ.ο $\exists x \in A$ με $x > 0 - \varepsilon = -\varepsilon$
Αν αυτό δε συνέβαινε τότε $x \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$
δηλ. $-\frac{1}{n} \leq -\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
αρα $\frac{1}{\varepsilon}$ ανω φράγμα του $\mathbb{N}$ άτοπο

Επομένως $\sup A = 0$

Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο

Αν $x \in A$ τότε $x = -\frac{1}{n}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$

Τότε $-\frac{1}{n+1} \in A$ και $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$ άρα το x δεν είναι μέγιστο στοιχείο του A

β' τρόπος

$\sup A = 0 \notin A$ άρα το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο

$B = \{x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad (x^2+2)^2 \le 4\}$

$(x^2+2)^2 \le 4$

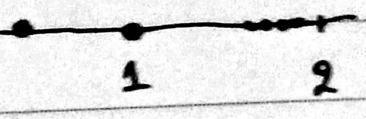
$\Leftrightarrow (\cancel{-2}) \quad x^2+2 \le 2$

$\Leftrightarrow x^2 \le 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ που είναι ρητός

$B = \emptyset$

$\Gamma = \{2-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$



Ομοίως όπως για το A προκύπτει $\min\Gamma = 0$ άρα $\inf\Gamma = 0$

$\sup\Gamma = 2 \notin \Gamma$ το Γ δεν έχει μέγιστο στοιχείο

$\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 3x+1 < 8\}$

$\Delta = (-\infty, \frac{7}{3})$ $\sup\Delta = \frac{7}{3}$ το Δ δεν έχει μέγιστο στοιχ.

Το Δ δεν είναι κάτω φραγμένο δεν έχει infimum.

Ασκηση 7

$a \in \mathbb{R}$

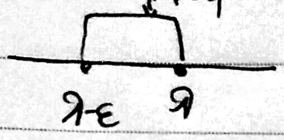
$A = \{ q \in \mathbb{Q} \quad q < a \}$ να δ.ο

$\sup A = a$

Αποδ.

α) Το a είναι άνω φράγμα του A (άμεσο από τον ορισμό του a)

β) Εστω $\varepsilon > 0$



Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς υπάρχει ένας ρητός q με $a - \varepsilon < q < a$

Εφόσον $q \in \mathbb{Q}$ και $q < a$ έχουμε $q \in A$

ενώ $q > a - \varepsilon$

Ασκηση 3

$A \neq \emptyset$ φραγμένο

$\inf A \leq \sup A$ (το έχουμε αποδείξει)

Αν $\inf A = \sup A$

Θα δείξουμε ότι A είναι μονοσύνολο με απαγωγή σε άτοπο

Αν δεν είναι μονοσύνολο $\exists\, x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$

Τότε $\inf A \leq x_1 \leq x_2 \leq \sup A \quad \Rightarrow \inf A < \sup A$ άτοπο

Άρα A μονοσύνολο